

Eksamen

Emnenavn: Statistikk og matematikk
Emnekode: Ma-143
Dato: 31. mai 2011
Varighet: 4 timer
Antall sider: 8 inkludert vedlegg
Vedlegg: Formler og tabeller, 5 sider
Tillatte hjelpemidler: Kalkulator uten kommunikasjonsmulighet

Skriv studentnummer på alle innleverte ark.
Skriv bare på en side per ark.
Skriv høyst en oppgave per ark.

Oppgave 1

Når vi har til hensikt å undersøke en problemstilling vil den statistiske metoden vi benytter og den grafiske fremstillingen vi velger være avhengig av spørsmålet vi stiller, siden spørsmålet avgjør formen på svaret og hvilke variabeltyper vi må jobbe med. Gi en oversikt over hvilke ulike variabeltyper du kjenner og gi eksempler på disse.

Oppgave 2

Laboratoriet på et legesenter måler hemoglobininnhold i blodprøver. Metoden har vært benyttet i lang tid, og man kan anta at målingene følger en normalfordeling med standardavvik $\sigma = 0,3$. Man kan også se bort fra systematiske feil i målingene. Hemoglobininnholdet skal bestemmes i en blodprøve, og en laborant gjør 5 målinger:

11,7 11,3 11,1 11,6 12,2

- a) Konstruer et konfidensintervall på 95 % nivå til hemoglobininnholdet i prøven.

Legesenteret kjøper en ny maskin for å måle hemoglobininnhold da man ønsker mer nøyaktige målinger, noe man er lovet av selgeren. Den eksakte verdien på standardavviket er dog ukjent. Fem nye målinger er

12,0 11,2 11,6 11,4 11,7

- b) Konstruer et konfidensintervall på samme nivå i dette tilfellet.

Oppgave 3

- a) Du får oppgitt at $\log 8 = 0,903$ og at $\log 40 = 1,602$.
Vis hvordan du kan bruke disse verdier samt logaritmeregler (men ikke kalkulator) til å regne ut følgende:
- i) $\log 64$ ii) $\log 0,08$ iii) $\log 5$ iv) $\log 200$
- b) Vis hvordan du forenkler uttrykkene (uten å bruke kalkulator):
- i) $e^{0,25} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{4^{-1}}$ ii) $(3^{\sqrt{3}} \cdot \pi^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3+4^x) \cdot 3^x}{6^x \cdot (5-7 \cdot 2^x)}$
- d) Gjennomsnittlig vektøkning per uke til babyer er 5 % de første 12 ukene. Hva er gjennomsnittlig vekt til en baby med en fødselsvekt på 4500 g 12 uker etter fødselen?

Oppgave 4

Konsentrasjonen av Kolesterol i blodet hos 8 overvektige personer er målt. Resultatene ble:

6,7 7,8 7,5 6,1 6,8 5,8 5,5 6,2

- a) Beregn middelerdi og standardavvik til datasettet.

Pasientene deltar på en måneds diett- og treningsopphold, og kolesterolnivåene måles igjen. Resultatene blir:

6,3 7,6 7,5 6,1 6,0 6,0 5,6 5,2

- b) Pasient nr. 8 blir brukt som eksempel i en reklamekampanje for dette diett- og treningsoppholdet. Men er det virkelig grunnlag for å hevde at behandlingen har en effekt? Besvar spørsmålet ved hjelp av en passende hypotesetest.

Før diett- og treningsoppholdet ble de 8 personene veid, og korrelasjonskoeffisienten mellom vekt og kolesterolnivå ble beregnet til 0,85.

- c) Hva forteller tallet 0,85 deg?

Oppgave 5

Skolens laboratorium for intern praksis har kjøpt et instrument for analysering av kalium i serum. Instrumentet skal valideres. Dette innebærer bl.a.

1) å analysere 19 prøver med referansemetoden og det nye instrumentet.

Referanselaboratoriet utgir (mmol/l) :

4,6; 4,3; 5,0; 5,0; 5,0; 4,0; 4,0; 4,1; 4,7; 4,0; 5,0; 3,4; 4,5; 3,4; 4,2; 3,0; 5,1; 5,0; 4,8.

Skolens resultater (mmol/l):

5,0; 5,3; 5,0; 5,6; 4,4; 3,4; 4,4; 5,3; 5,7; 4,4; 7,0; 3,6; 5,5; 4,0; 5,3; 3,7; 6,3; 7,0; 5,6

2) 2 ferske prøver kjøres 10 ganger for å undersøke prestasjonen ved forskjellige konsentrasjons nivå.

a) Resultater prøve1: 2,3; 2,0; 2,5; 2,2; 2,0; 2,1; 3,0; 2,5; 2,3; 2,6.

b) Resultater prøve 2: 3,5; 3,5; 3,6; 3,5; 3,4; 3,6; 3,5; 3,4; 3,4; 3,4.

Krav til analytisk kvalitet basert på biologiske data for Kalium: $B < 1,8\%$; $I < 2,4\%$.

$TEa < B + 1,65 I$ (konfidensnivå: 95%) Referanseområde for S-K: 3,6 - 5,0 mmol/L. Vi antar at resultatene er trukket fra en gaussisk populasjon.

- 1) Hvor stor feil kan den nye analysemetoden ha før forbedrende tiltak må iverksettes (innenfor 95 % konfidens)?
- 2) Vurder det nye instrumentets presisjon i forhold til kravet.
- 3) Vurder statistisk om referansemetoden og den nye gir forskjellig svar.
- 4) Etter at du har funnet ut hvilken type problem metoden har, foreslå et tiltak til forbedring, evt. andre undersøkelser.



Formler:

1. **KI for middelveien i et utvalg:** $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ $SEM = \frac{s}{\sqrt{n}}$

2. **KI for differensen mellom middelveiene i to utvalg:**

$$SEM_{diff} = \sqrt{(SEM_A)^2 + (SEM_B)^2}$$

3. **KI for et forholdstall:** $SEM = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

4. **KI for differensen mellom to forholdstall:** $SEM_{diff} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_2}}$

5. **Test for en tallgruppe:**

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad SEM = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad t_{eks} = \frac{|x - \mu|}{SEM} = \frac{|x - \mu| \cdot \sqrt{n}}{s}$$

6. **Test for to uavhengige tallgrupper:**

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_x - 1) \cdot s_x^2 + (n_y - 1) \cdot s_y^2}{n_x + n_y - 2}} \quad t_{eks} = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{s_p} \cdot \sqrt{\frac{n_x \cdot n_y}{n_x + n_y}}$$

7. **Test for to avhengige tallgrupper:** $t_{eks} = \frac{|D| \cdot \sqrt{n}}{s_D}$

8. **F-test** $F_{eks} = \frac{s_x^2}{s_y^2}$

9. **Kji-kvadrat-test:** $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$

10. **Fortegnstest:** $z = \frac{r - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

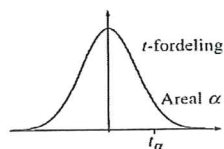
11. **Pearsons korrelasjonskoeffisient:** $r = \frac{\sum (x - \bar{X}) \cdot (y - \bar{Y})}{s_x \cdot s_y \cdot \sqrt{n-1}}$

12. **Spearman's rangkorrelasjonskoeffisient:** $\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum (D^2)}{n \cdot (n^2 - 1)}$

13. **Total tillatt feil:** $TE_{a, 0,95} < B + 1,65 I$

D.5 t-fordelingens kvantiltabell

Tabellen viser den kritiske verdien t_{α} for forskjellige valg av nivået α .



| Antall frihetsgrader | Areal alfa | | | | | |
|----------------------|------------|-------|-------|--------|--------|--------|
| | 0,25 | 0,1 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 |
| 1 | 1,000 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,656 |
| 2 | 0,816 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| 3 | 0,765 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| 4 | 0,741 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| 5 | 0,727 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| 6 | 0,718 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| 7 | 0,711 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| 8 | 0,706 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| 9 | 0,703 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| 10 | 0,700 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| 11 | 0,697 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| 12 | 0,695 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| 13 | 0,694 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| 14 | 0,692 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| 15 | 0,691 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |
| 16 | 0,690 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 |
| 17 | 0,689 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 |
| 18 | 0,688 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 |
| 19 | 0,688 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 |
| 20 | 0,687 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 |
| 21 | 0,686 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 |
| 22 | 0,686 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 |
| 23 | 0,685 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 |
| 24 | 0,685 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 |
| 25 | 0,684 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 |
| 26 | 0,684 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 |
| 27 | 0,684 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 |
| 28 | 0,683 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 |
| 29 | 0,683 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 |
| 30 | 0,683 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 |
| 31 | 0,682 | 1,309 | 1,696 | 2,040 | 2,453 | 2,744 |
| 32 | 0,682 | 1,309 | 1,694 | 2,037 | 2,449 | 2,738 |
| 33 | 0,682 | 1,308 | 1,692 | 2,035 | 2,445 | 2,733 |
| 34 | 0,682 | 1,307 | 1,691 | 2,032 | 2,441 | 2,728 |
| 35 | 0,682 | 1,306 | 1,690 | 2,030 | 2,438 | 2,724 |
| 40 | 0,681 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 |
| 45 | 0,680 | 1,301 | 1,679 | 2,014 | 2,412 | 2,690 |
| 50 | 0,679 | 1,299 | 1,676 | 2,009 | 2,403 | 2,678 |
| 60 | 0,679 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 |
| 70 | 0,678 | 1,294 | 1,667 | 1,994 | 2,381 | 2,648 |
| 80 | 0,678 | 1,292 | 1,664 | 1,990 | 2,374 | 2,639 |
| 100 | 0,677 | 1,290 | 1,660 | 1,984 | 2,364 | 2,626 |
| 1000 | 0,675 | 1,282 | 1,646 | 1,962 | 2,330 | 2,581 |
| 10000 | 0,675 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,327 | 2,576 |

Verdien t_{α} er beregnet av Excel-funksjonen TINV($2 \cdot \alpha$; frihetsgrad).

C. Kumulativ standard normalfordeling

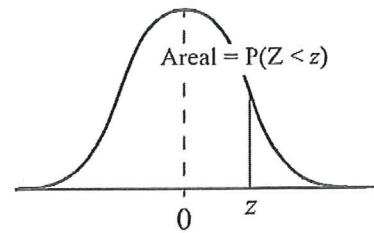
Tabellen viser arealet $P(Z < z)$ der $Z \sim N(0, 1)$.

For negative verdier av z benyttes sammenhengen:

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z).$$

Eksempel:

$$\begin{aligned} P(Z < -1,26) &= 1 - P(Z < 1,26) \\ &= 1 - 0,8962 = 0,1038 \end{aligned}$$



| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

Z-tabell forts.

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

5. F-tabell

| F-verdier – frihetsgrader i teller (vannrett) og nevner (loddrett) | | | | | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | ∞ |
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 242 | 242 | 246 | 248 | 254 |
| 2 | 18,50 | 19,00 | 19,20 | 19,30 | 19,30 | 19,30 | 19,40 | 19,40 | 19,40 | 19,40 | 19,40 | 19,50 | 19,50 |
| 3 | 10,10 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,70 | 8,66 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,86 | 5,80 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,62 | 4,56 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 3,94 | 3,87 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,51 | 3,44 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,22 | 3,15 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,01 | 2,94 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,91 | 2,77 | 2,54 | 2,54 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,62 | 2,54 | 2,30 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,97 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 | 2,40 | 2,33 | 2,07 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,35 | 2,20 | 2,12 | 1,84 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,01 | 1,93 | 1,62 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 1,92 | 1,84 | 1,51 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,53 | 2,37 | 2,25 | 2,17 | 2,10 | 2,04 | 1,99 | 1,84 | 1,75 | 1,39 |
| 120 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,45 | 2,29 | 2,19 | 2,09 | 2,02 | 1,96 | 1,91 | 1,75 | 1,66 | 1,25 |
| ∞ | 3,84 | 3,00 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,10 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,83 | 1,67 | 1,57 | 1,00 |

