

EKSAMEN

Emnekode:

MA-111

Emnenavn:

Matematikk for multimedia

Dato:

1. juni 2012

Varighet:

9:00 — 12:00

Antall sider inkl. forside: 4 (side 2-4 inneholder godkjent formelsamling).

Tillatte hjelpeemidler: Godkjent kalkulator og skrivesaker.

Merknader: Denne eksamen teller 60 %.

Noen av disse verdiene brukes i flere av oppgavene:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad c = 5.$$

1. Regn ut $\mathbf{X}\mathbf{p}$, $\mathbf{Y}\mathbf{c}$ og \mathbf{a}/c .
2. Regn ut \mathbf{XY} og \mathbf{YX} .
3. Finn enhetsvektoren som peker i samme retning som \mathbf{p} .
4. \mathbf{F} er en skaleringsmatrise som strekker punkter med en faktor på 4 langs x -aksen, og med en faktor på 3 langs y -aksen. Finn \mathbf{F} , og bruk den til å transformere \mathbf{p} .
5. Regn ut egenverdiene og egenvektorene til \mathbf{Y} .
6. Linja l beskrives med likningen $y = 3x + 2$. Enrett linje m er bestemt ved å rottere l 180° om origo. Finn likningen for m ved å bruke en rotasjonsmatrise.
7. Matrisen \mathbf{M} roterer punkter i planet, en vinkel på $\frac{\pi}{3}$ radianer om aksen \mathbf{a} . Skriv \mathbf{M} som et produkt av tre matriser. Du skal ikke gange disse matrisene sammen. Det viser seg at $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 & 2.23 \\ 0.87 & 0.5 & 0.13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bruk \mathbf{M} for å rottere \mathbf{p} .
8. Finn matrisen \mathbf{S} som roterer punkter i rommet, en vinkel på $\frac{\pi}{3}$ radianer om aksen \mathbf{v} .

Alle oppgavene teller like mye.

Todimensjonale vektorer

En todimensjonal vektor består av to tall og kan f.eks. representerer en posisjon eller en forflytning i et todimensjonalt koordinatsystem. Som navn på vektorer brukes som regel små bokstaver. To vanlige skrivemåter er

- 1) Navn med fet skrift, \mathbf{a} , er vanlig i trykt tekst.
- 2) Pil over navn, \vec{a} , er vanlig i håndskrevet tekst.

Skrivemåte: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \leftarrow x\text{-komponent}$
 $\qquad\qquad\qquad \downarrow \leftarrow y\text{-komponent}$

Nullvektor: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Multiplikasjon av vektor med tall: $k\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}$

Divisjon av vektor med tall: $\mathbf{a}/k = \begin{bmatrix} a_1/k \\ a_2/k \end{bmatrix}$

Addisjon av to vektorer: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$

Differanse av to vektorer: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix}$

Lengden av en vektor: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Skalarprodukt (prikkprodukt): $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Dette betyr at $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

Hvis \mathbf{a} står vinkelrett på \mathbf{b} skrives det slik: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

Det viser seg at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

En enhetsvektor er en vektor med lengde 1. For å regne ut en enhetsvektor \mathbf{n} som peker samme retning som en vektor \mathbf{v} brukes formelen

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Kryssprodukt/vektorprodukt er en regneoperasjon definert for tredimensjonale vektorer:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{v} vil nå stå vinkelrett både på \mathbf{a} og \mathbf{b} . Det er også slik at

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

En teknikk for å regne ut kryssproduktet mellom to vektorer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 \\ 3 \times 6 \\ 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 6 - 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 - 6 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 15 \\ 12 - 6 \\ 5 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Matriser

En matrise er en samling med tall som er arrangert i rader og kolonner. Som navn på matriser brukes som regel store bokstaver. I trykt tekst er det vanlig å bruke fet skrift på navnet, mens i håndskrevne tekster er det vanlig å bare skrive en stor bokstav. En **$m \times n$ -matrise** ("m ganger n matrise") er en matrise med m rader og n kolonner. m og n trenger ikke å være forskjellige tall.

En 2×3 -matrise kan skrives slik:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Et tall i en matrise kalles et element. Navn på elementer i matriser følger dette systemet med to indekser:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Dvs: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = -2$.

Multiplikasjon av 2×2 -matrise med 2D-vektor:

$$\mathbf{Ap} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{bmatrix}$$

Hvis antallet kolonner i en matrise likt antallet rader i en annen matrise, så kan de ganges sammen som i eksemplet her:

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{array} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 17 & 3 & 4 \\ 15 & 7 & -8 & 4 \\ -3 & 27 & 11 & -4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 68 & -9 & -51 & 28 \\ 174 & 280 & -27 & 24 \\ 37 & 163 & 26 & 4 \end{bmatrix}$$

F.eks. så har -27 her kommet frem ved å plusse sammen produktet av tall fra 2. rad i \mathbf{A} og 3. kolonne i \mathbf{B} slik:

$$0 \cdot 3 + 13 \cdot (-8) + 7 \cdot 11 = -27$$

Merk at $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ som regel ikke er lik $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$!

Rotasjonsmatrise i 2D

Rotasjon som dreier en vektor mot klokken en vinkel θ :

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Rotasjon av en graf $y = f(x)$

Grafen til en likning med y og x roteres med en vinkel θ ved å bytte ut x og y i likningen med hhv. x - og y -komponenten til

$$\mathbf{R}(-\theta) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \\ -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$$

Skalering med diagonalmatriser

En kvadratisk matrise har like mange rader og kolonner. Diagonalen i en kvadratisk matrise betyr elementene fra øverste venstre hjørne til nederste høyre hjørne. Kvadratiske matriser kan være symmetriske. Da er verdien på elementene speilet om diagonalen like. En symmetrisk 2×2 -matrise kan skrives slik:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & b \\ b & a_{22} \end{bmatrix}$$

En diagonalmatrise er en symmetrisk matrise der alle de symmetriske verdiene er lik 0. En 2×2 -diagonalmatrise kan skrives:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

En diagonalmatrise skalerer vektorer langs x - og y -aksene:

$$\mathbf{D}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_1 \\ a_{22}p_2 \end{bmatrix}$$

Skalering med symmetriske matriser

Sporet (trasen) til en matrise: $\text{tr } M = a_{11} + a_{22}$. Determinanten til en matrise: $\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. En matrise M er positiv hvis $\text{tr } M \geq 0$ og $\det M \geq 0$.

Egenverdier

En symmetrisk matrise skalerer vektorer med faktorer som kalles matrisens egenverdier. Egenverdiene til matrisen M regnes ut med formelen

$$g = \frac{1}{2} \left(m_{11} + m_{22} \pm \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}^2} \right)$$

M er positiv $\Leftrightarrow g_1 \geq 0$ og $g_2 \geq 0$

Egenverdiene g_1 og g_2 utgjør spekteret til M . Det å finne dem kalles spektralanalyse. Hvis M er en diagonalmatrise så er egenverdiene lik elementene på diagonalen til M . Skalering skjer langs matrisens egenakser som går langs matrisens egenvektorer. Egenvektorene u og v regnes ut med formlene

$$u = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g_1 - m_{11} \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} m_{12} \\ g_2 - m_{11} \end{bmatrix}$$

Egenakser står alltid vinkelrett på hverandre.

For en symmetrisk matrise M med egenverdier g_1 og g_2 og tilhørende egenvektorer u og v så er de følgende såkalte egenverdilikningene oppfylt:

$$Mu = g_1 u \quad Mv = g_2 v$$

Matriserotasjon

Egenaksene til en symmetrisk matrise M kan roteres med en vinkel θ med formelen

$$N = R(\theta)MR(-\theta)$$

Hvis M roteres slik at egenaksene går langs x - og y -aksene så blir N en diagonalmatrise. Dette kalles å diagonalisere M .

Omvendt så kan en diagonalmatrise D som skalerer langs x - og y -aksene roteres med en vinkel θ for å skalere langs andre akser, slik:

$$M = R(-\theta)DR(\theta)$$

Translasjon (flytting)

Et punkt p kan transieres ved å legge til en vektor d slik at punktet blir flyttet til p' slik:

$$p' = p + d$$

Å flytte i retningen til d , en lengde på k , gjøres slik:

$$p' = p + \frac{d}{|d|} \cdot k$$

Men for å transiere punkter med matrisemultiplikasjon trengs homogene koordinater.

Homogene 2D-koordinater

Et punkt i planet kan representeres med vektoren

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Det samme punktet representeres i homogene koordinater slik:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogene transformasjoner

Homogene transformasjoner utføres alltid ved å gange en såkalt transformasjonsmatrise med en vektor. Resultatet er en ny vektor som er den transformerte vektoren.

Homogen translasjon i 2D

Et punkt p kan transieres til punktet p' med en vektor a og translasjonsmatrisen $T(a)$ definert slik:

$$T(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogen rotasjon i 2D

Rotasjon som dreier en vektor mot klokken en vinkel θ :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogen skalering i 2D

Transformasjon med en symmetrisk matrise M :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & b & 0 \\ b & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kombinasjoner av transformasjoner

En transformasjon kan settes sammen av andre. F.eks. for å først rotere p med en vinkel på 45° , så translere med vektoren a , og til slutt rotere med en vinkel på 32° :

$$p' = R(32^\circ)T(a)R(45^\circ)p$$

Merk at transformasjonen som utføres sist skal stå først!

Rotasjon/skalering om et punkt

En vanlig rotasjonstransformasjon vil utføres med origo som sentrum. For å rotere om en vilkårlig akse a brukes transformasjonen

$$R(\theta, a) = T(a)R(\theta)T(-a)$$

Tilsvarende gjelder for skalering.

Rotasjoner i rommet

Rotasjon av en tredimensjonal vektor r kan utføres med en 3×3 -matrise M med to parametere:

- 1) En enhetsvektor n som bestemmer rotasjonsakse og rotasjonsretning; Om n står vinkelrett ut fra midten av en klokke, vil rotasjonen foregå motsatt vei av viserene.
- 2) Rotasjonsvinkelen θ .

Den roterte vektoren r' kan regnes ut uten å bruke en rotasjonsmatrise, slik [1]:

$$r' = r \cos \theta + n(n \cdot r)(1 - \cos \theta) + (n \times r) \sin \theta$$

Rotasjonsmatrisen blir slik:

$$R(n, \theta) = I \cos \theta + N(1 - \cos \theta) + A \sin \theta$$

Der I , N og A er definert som følger:

I er den såkalte identitetsmatrisen, som er en diagonalmatrise med 1 langs diagonalen, altså

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

N er tensorproduktet $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, dvs $N_{ij} = n_i n_j$:

$$N = \begin{bmatrix} n_1 n_1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2 n_2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3 n_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Homogene 3D-koordinater

Et punkt i rommet kan representeres med vektoren

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Det samme punktet representeres i homogene koordinater slik:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogen translasjon i 3D

Translasjonsmatrisen $T(\mathbf{a})$ for 3 dimensjoner er definert slik:

$$T(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogen rotasjon i 3D

Dette fungerer på tilsvarende måte som i 2D; Rotasjonsmatrisen R regnes ut og representeres i homogene koordinater med matrisen

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotasjon om vilkårlig akse

En rotasjon en vinkel θ om en akse som er parallel til vektoren \mathbf{n} , men som går gjennom punktet \mathbf{a} er representeret av matrisen

$$R(\mathbf{n}, \theta, \mathbf{a}) = T(\mathbf{a}) R(\mathbf{n}, \theta) T(-\mathbf{a})$$

Syntaks i Maxima

Kommmandoer gis til programmet med tekst + Shift+Enter. For å regne på vektorer og matriser må man først kjøre kommandoen `load(vect)`. Alle svar får navn på formen `%o+tall` og kan refereres til ved dette navnet i følgende utregninger. Sinus og cosinus regnes ut med funksjonene `sin()` og `cos()`. Programmet regner kun med radianer. Referer til π med `%pi`.

Lage en vektor: `p: [1,1,2]`

Legge sammen vektorer: `p+q`

Tall ganger vektor: `3*p`

Skalarprodukt: `p.q` (med punktum)

Lengde av vektor: `sqrt(p.p)`

Lage matrise: Velg i menyen: `Algebra→Enter Matrix...`

Gange matrise med vektor: `A.p`

Gange matrise med matrise: `A.B`

Kryssprodukt: `p~q`

Noen uttrykk må tvinges frem med: `express()`

Svar som desimaltall: `float()`

Antall siffer i svar kan stilles med: `fpprintprec:4`
Dette setter antall siffer i svar til 4.

Funksjoner kan lages med operatoren `:=`
F.eks. kan man bruke menyen for å sette inn en 2×2 rotasjonsmatrise og så navigere seg til uttrykket med pilastene og redigere så det ser slik ut (med shift+enter etterpå):

$$\text{R(t)} := \text{matrix}\left(\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \right);$$

For filer som åpnes i programmet wxMaxima, så må programmet regne ut alle uttrykkene på nytt. Dette gjøres med menyvalget `Cell→Evaluate All Cells (Ctrl+R)`.

Om formelsamlingen

Denne formelsamlingen er laget av Jostein Trondal i April 2012, og er spesielt tilpasset faget MA-111 Matematikk for multimedia ved Universitetet i Agder i Grimstad. Takk til Leon Marbl for kommentar om trykkfeil!

Dette er versjon 5.

Dokumentet kan kopieres fritt av alle.

Kommentarer er velkomne og sendes til `jostein@trondal.no`

Siste versjon ligger forhåpentligvis her:

<http://trondal.com/vektor.pdf>

Referanser

- [1] H. Goldstein, J. Charles P. Poole, and J. L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3rd edition, 2000.