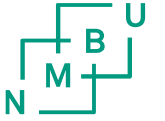


TRE PROBLEMER DESIGNET FOR EN UTFORSKENDE INTRODUKSJON TIL INTEGRASJON

Marte Bråtalien, Joakim Skogholt og Margrethe Naalsund
NMBU.

Hvordan kan problemer som bidrar til en utforskende introduksjon til integrasjon se ut?



Represent	Actively use and combine representations of the problem. Moving between representations.
Refocus	Move focus from the curve itself to the geometrical shape between the curve and the x-axis in a given interval.
Area	Discover that the area of the geometrical shape can be calculated to solve the problem. Inquiring on why the area can represent another quantity.
Accumulate	Find ways to calculate the area through dividing it into subareas and accumulating the areas of these “bits”.
Approximate	Reflect on how to tackle the problem if the area cannot be calculated exactly.
Refine	Reflect on how to improve the approximation.

(Bråtalien, Skogholt, & Naalsund, 2022)

Resultat: En sekvens bestående av tre problemer



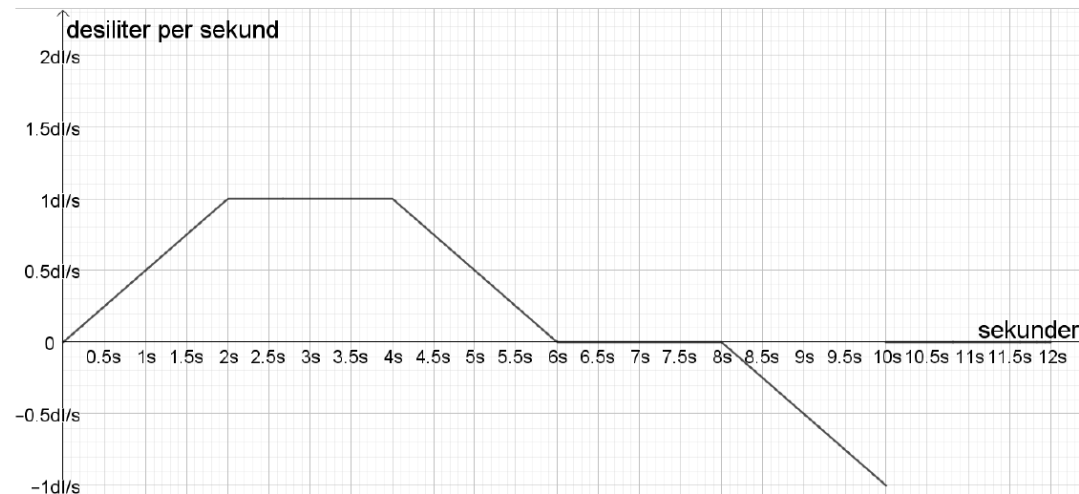
1 En biltur

En familie på tur kjører en bil med konstant fart $50\text{km}/t$.

- Velg et tidspunkt mellom 0 og 5 timer. Regn ut hvor langt familien har kjørt på dette tidspunktet.
- Lag et plott som viser hastigheten som en funksjon av tid for t mellom 0 og 5 timer. Diskuter om dere kunne ha brukt grafen til å regne ut dette.

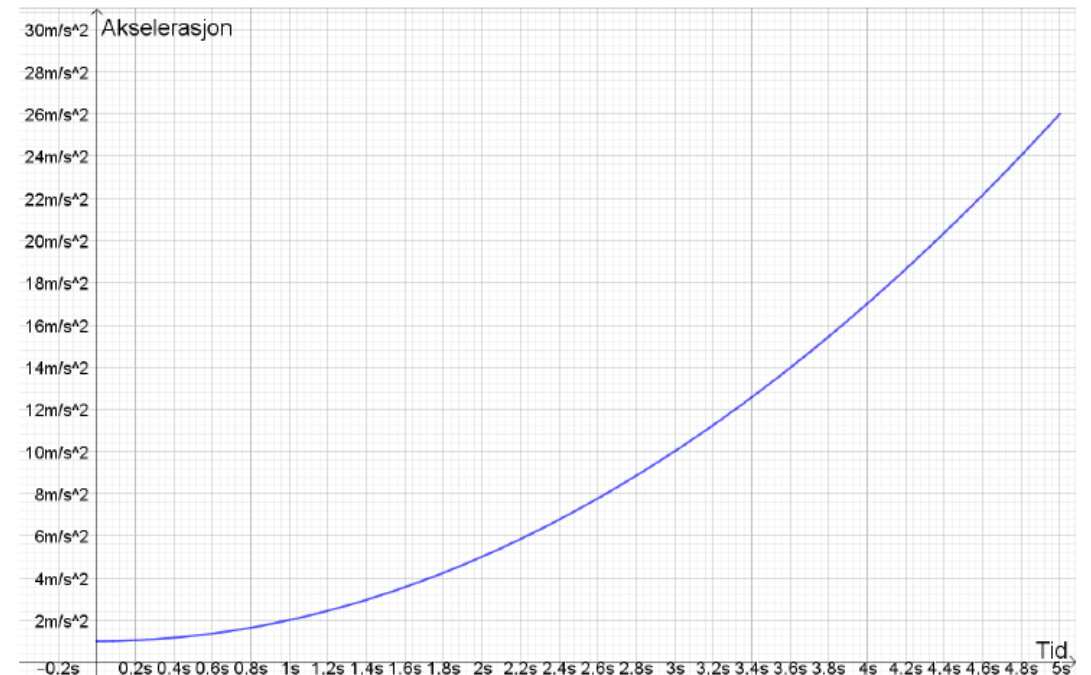
2 Å fylle en flaske med vann

Anne ønsker å fylle en tom flaske med nøyaktig 3 dl vann. Figuren nedenfor viser hvor mye vann som kommer inn og ut av flasken ved tiden t . Diskuter om Anne lykkes.



3 Bånn gass!

Kåre sitter i en bil og trækker hardt på gasspedalen ved tiden $t = 0$. Akselerasjonen til bilen er vist som en funksjon av tid i figuren nedenfor. Estimer hastigheten Kåre kjører i etter 4 sekunder. Skriv ned eventuelle antakelser du gjør. Diskuter hvordan estimatet kan forbedres.

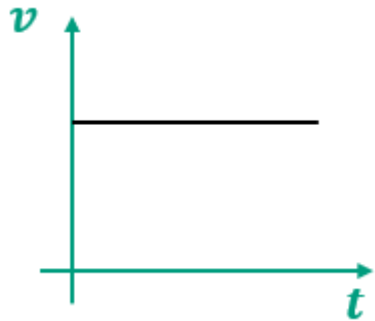


1 En biltur

En familie på tur kjører en bil med konstant fart 50km/t .

- Velg et tidspunkt mellom 0 og 5 timer. Regn ut hvor langt familien har kjørt på dette tidspunktet.
- Lag et plott som viser hastigheten som en funksjon av tid for t mellom 0 og 5 timer. Diskuter om dere kunne ha brukt grafen til å regne ut dette.

strekning = tid · fart



Represent
Refocus
Area

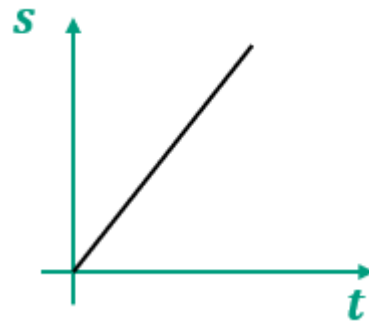
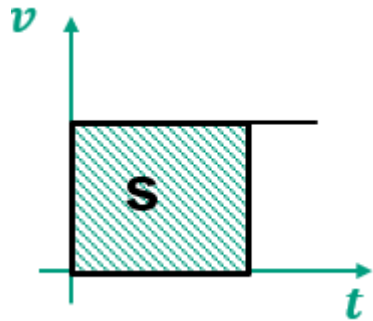
1 En biltur

En familie på tur kjører en bil med konstant fart 50km/t .

- Velg et tidspunkt mellom 0 og 5 timer. Regn ut hvor langt familien har kjørt på dette tidspunktet.
- Lag et plott som viser hastigheten som en funksjon av tid for t mellom 0 og 5 timer. Diskuter om dere kunne ha brukt grafen til å regne ut dette.

Represent
Refocus
Area

strekning = tid · fart



2 Å fylle en flaske med vann

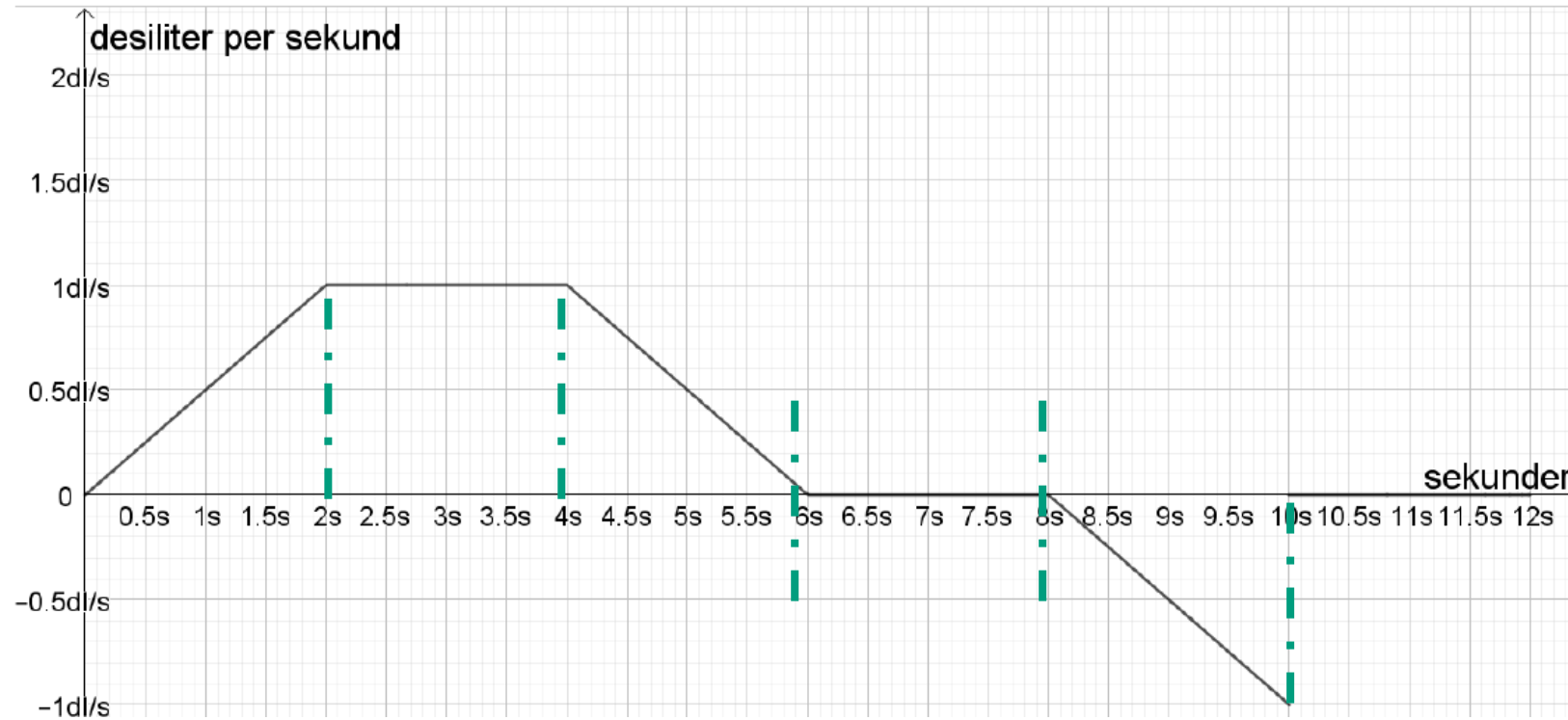
Anne ønsker å fylle en tom flaske med nøyaktig 3 dl vann. Figuren nedenfor viser hvor mye vann som kommer inn og ut av flasken ved tiden t . Diskuter om Anne lykkes.



Refocus
Area
Accumulate

2 Å fylle en flaske med vann

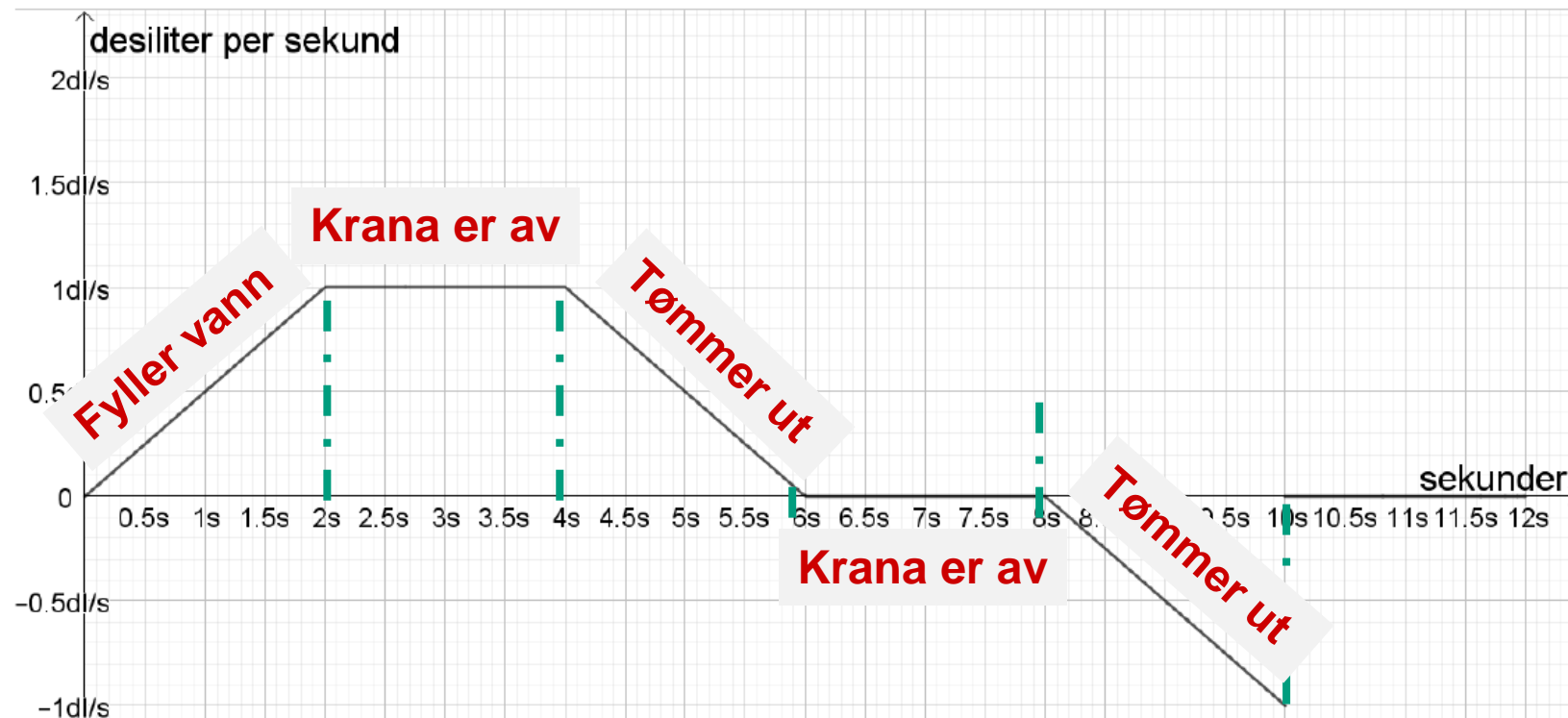
Anne ønsker å fylle en tom flaske med nøyaktig 3 dl vann. Figuren nedenfor viser hvor mye vann som kommer inn og ut av flasken ved tiden t . Diskuter om Anne lykkes.



Refocus
Area
Accumulate

2 Å fylle en flaske med vann

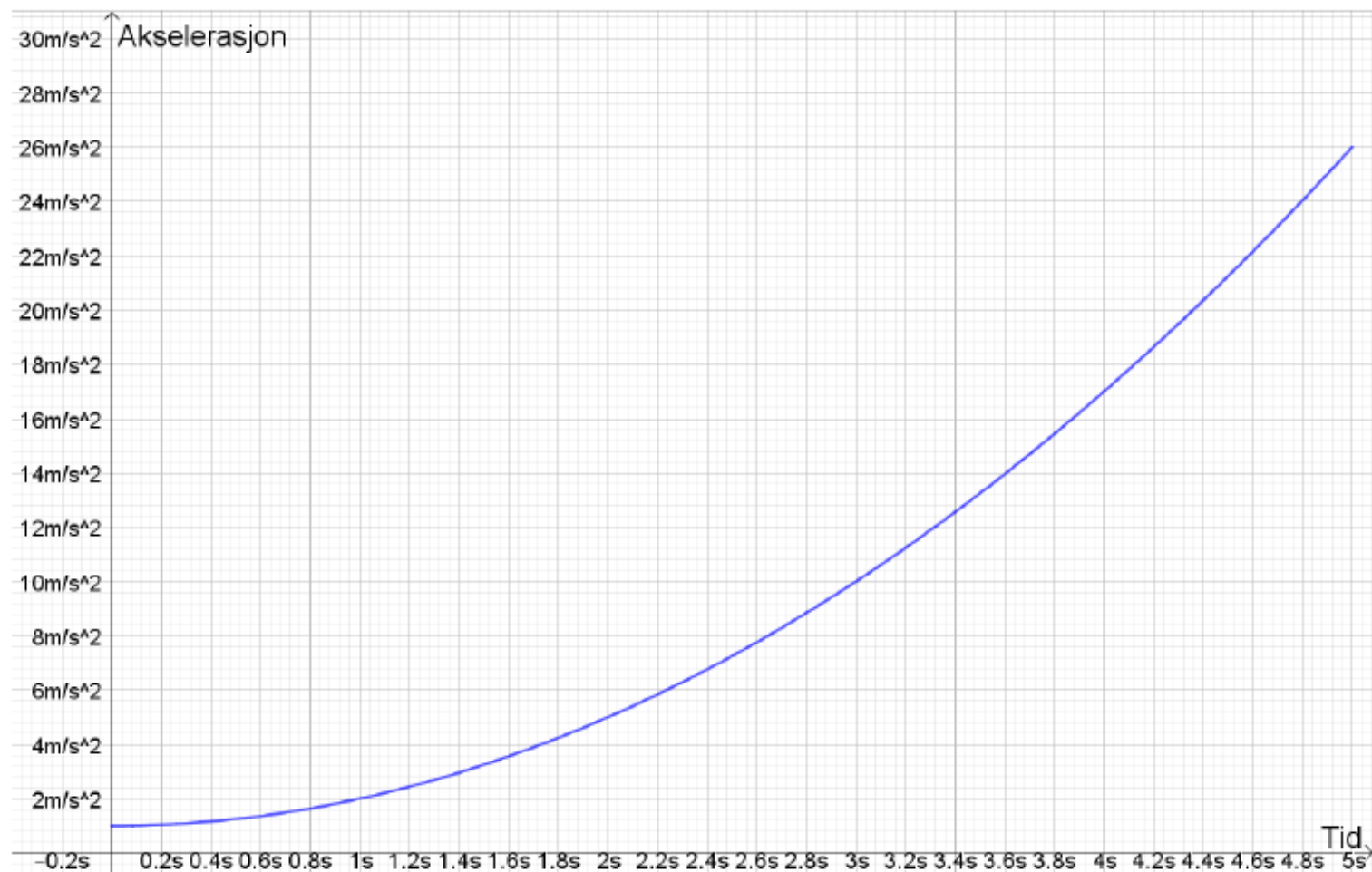
Anne ønsker å fylle en tom flaske med nøyaktig 3 dl vann. Figuren nedenfor viser hvor mye vann som kommer inn og ut av flasken ved tiden t . Diskuter om Anne lykkes.



Refocus
Area
Accumulate

3 Bånn gass!

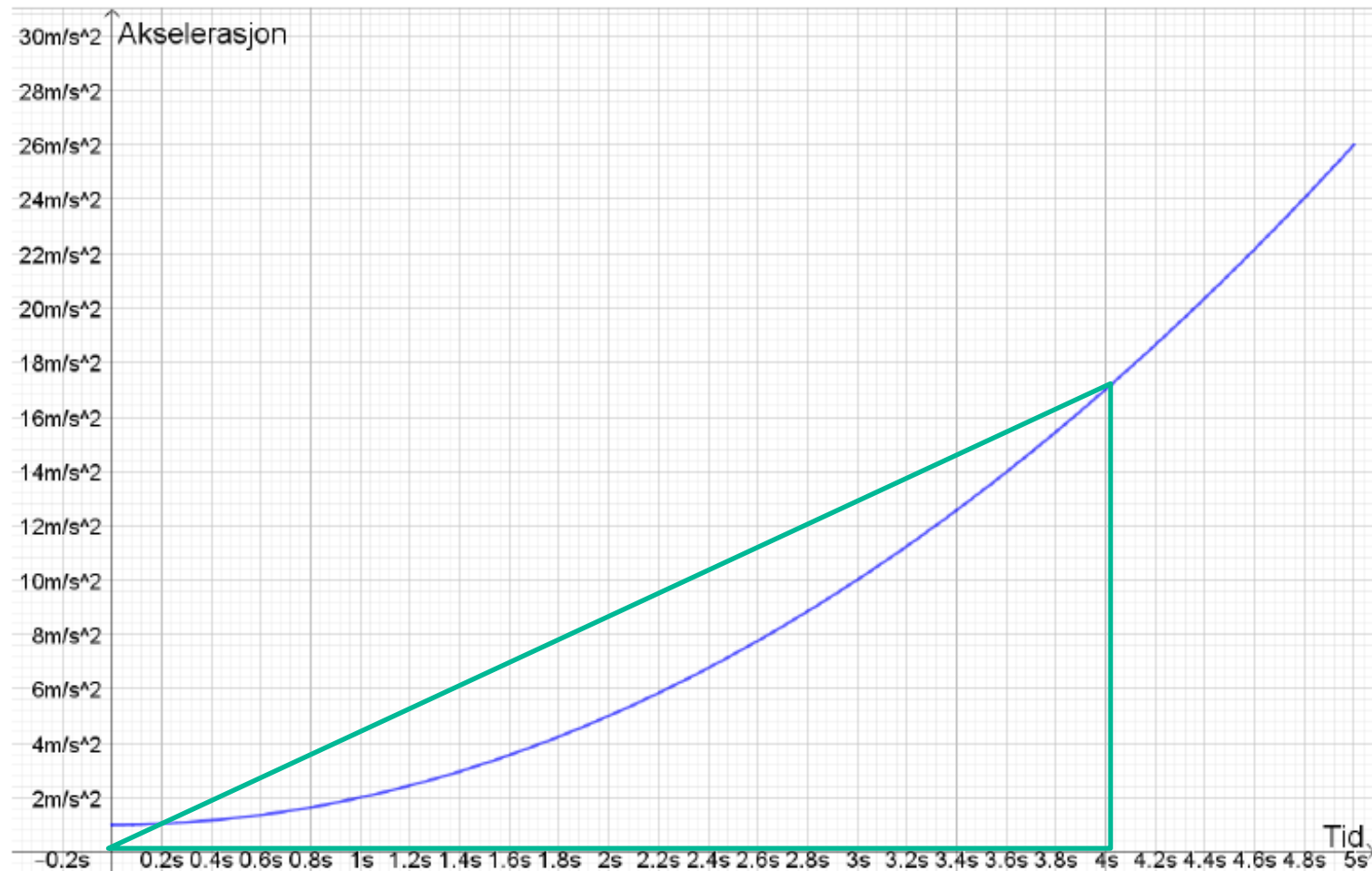
Kåre sitter i en bil og trækker hardt på gasspedalen ved tiden $t = 0$. Akselerasjonen til bilen er vist som en funksjon av tid i figuren nedenfor. Estimer hastigheten Kåre kjører i etter 4 sekunder. Skriv ned eventuelle antakelser du gjør. Diskuter hvordan estimatet kan forbedres.



Refocus
Area
Accumulate
Approximate
Refine

3 Bånn gass!

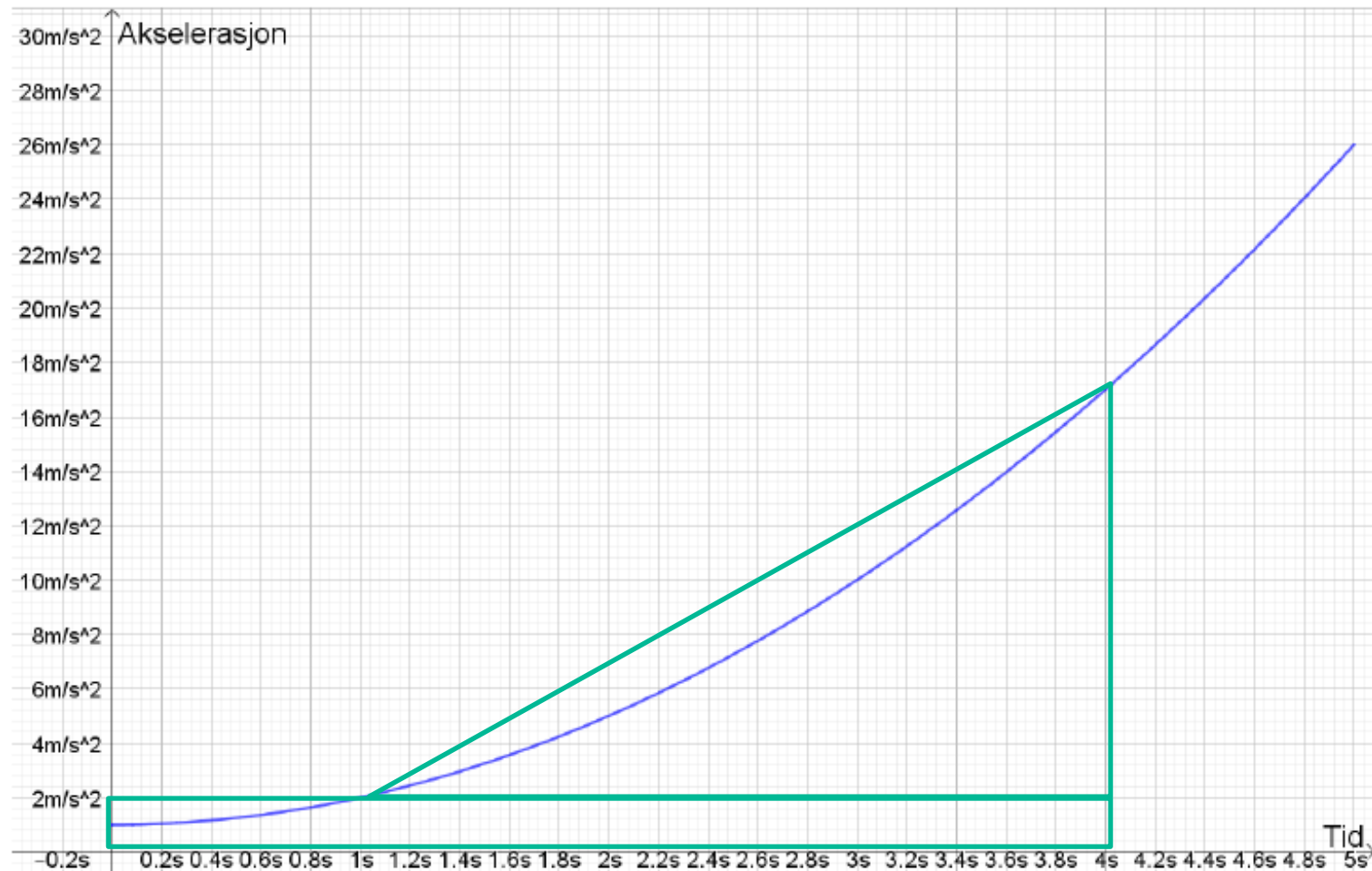
Kåre sitter i en bil og trækker hardt på gasspedalen ved tiden $t = 0$. Akselerasjonen til bilen er vist som en funksjon av tid i figuren nedenfor. Estimer hastigheten Kåre kjører i etter 4 sekunder. Skriv ned eventuelle antakelser du gjør. Diskuter hvordan estimatet kan forbedres.



Refocus
Area
Accumulate
Approximate
Refine

3 Bånn gass!

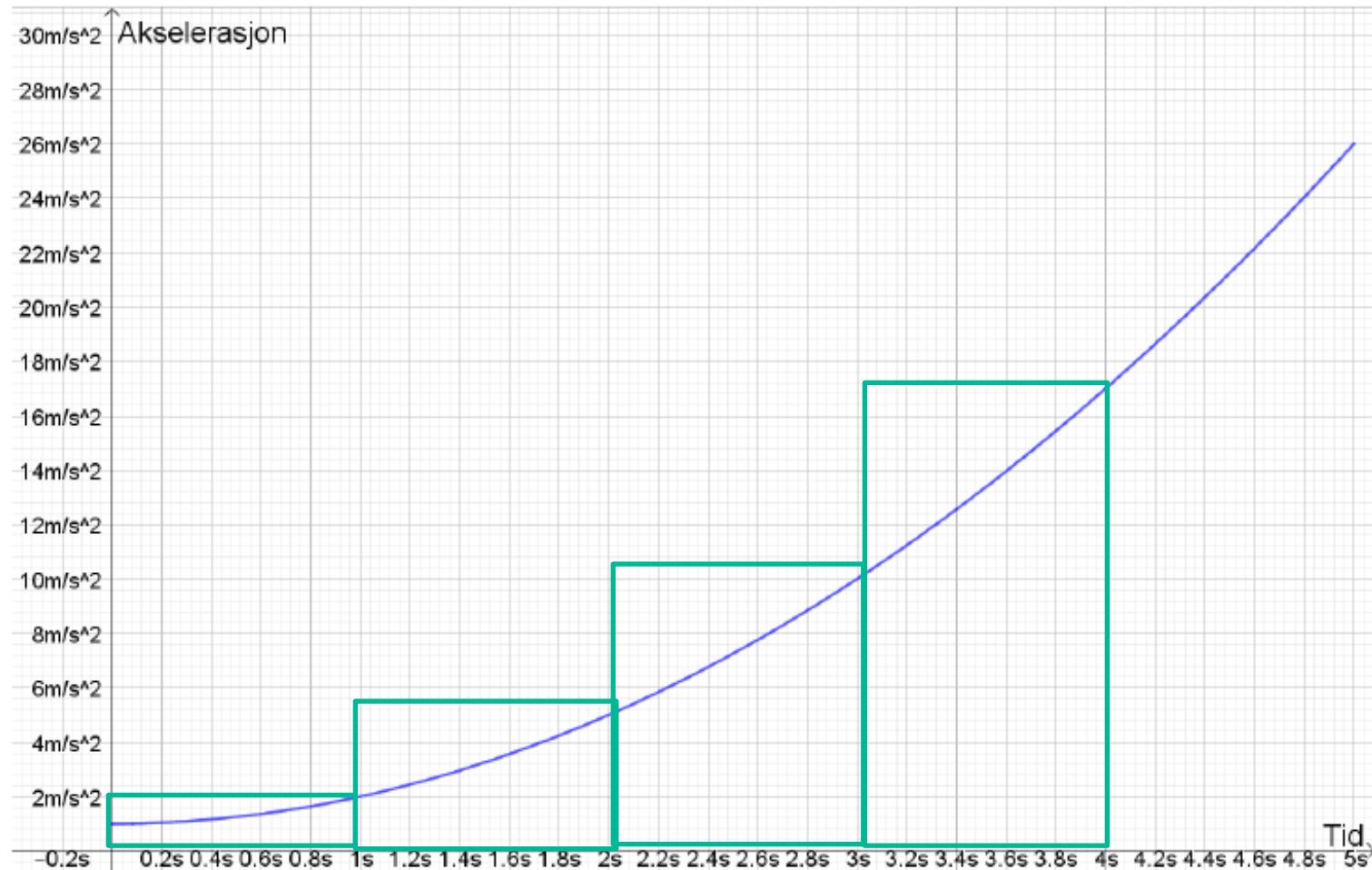
Kåre sitter i en bil og trækker hardt på gasspedalen ved tiden $t = 0$. Akselerasjonen til bilen er vist som en funksjon av tid i figuren nedenfor. Estimer hastigheten Kåre kjører i etter 4 sekunder. Skriv ned eventuelle antakelser du gjør. Diskuter hvordan estimatet kan forbedres.



Refocus
Area
Accumulate
Approximate
Refine

3 Bånn gass!

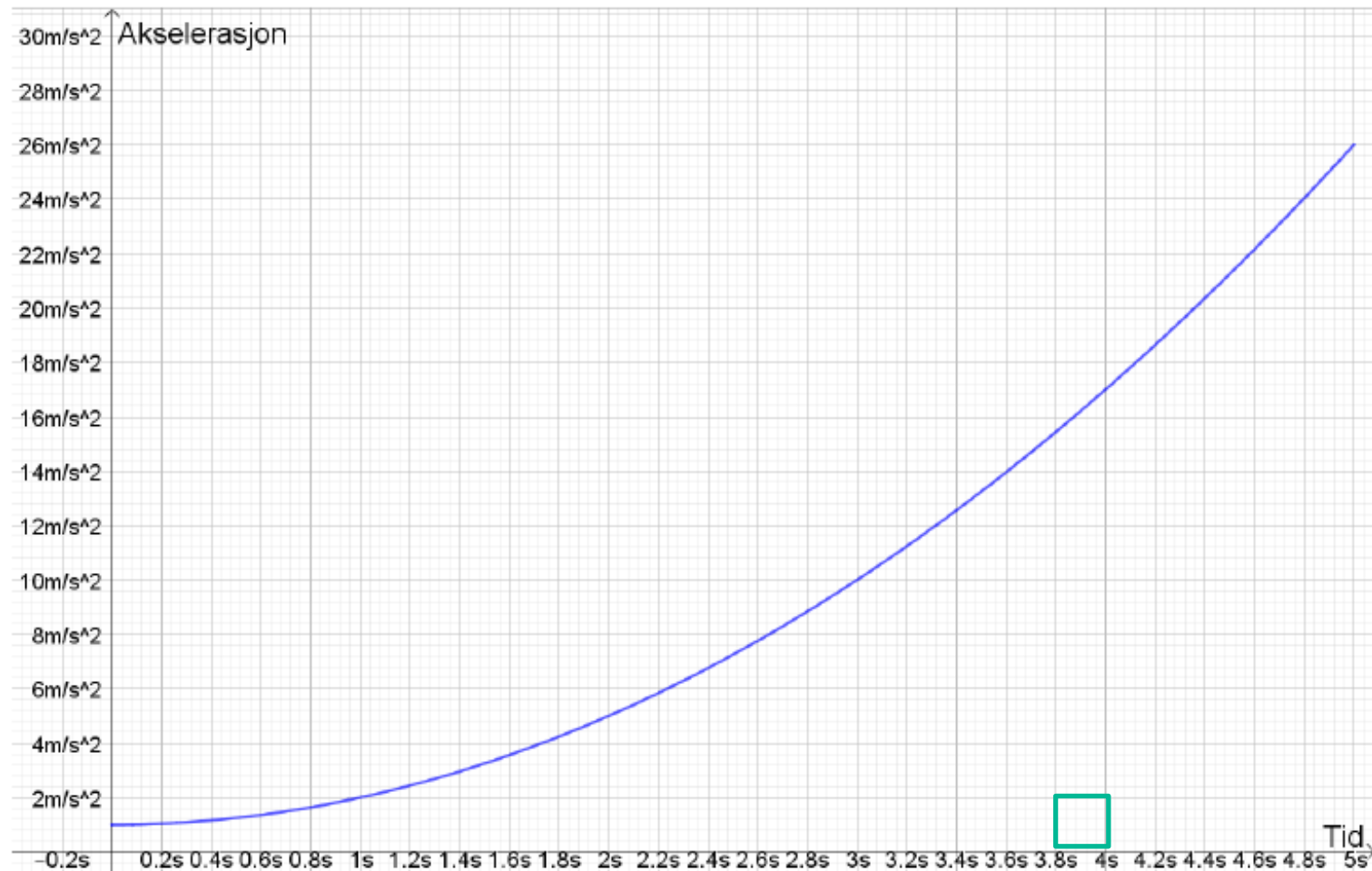
Kåre sitter i en bil og trækker hardt på gasspedalen ved tiden $t = 0$. Akselerasjonen til bilen er vist som en funksjon av tid i figuren nedenfor. Estimer hastigheten Kåre kjører i etter 4 sekunder. Skriv ned eventuelle antakelser du gjør. Diskuter hvordan estimatet kan forbedres.



Refocus
Area
Accumulate
Approximate
Refine

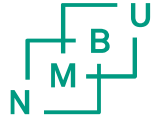
3 Bånn gass!

Kåre sitter i en bil og trækker hardt på gasspedalen ved tiden $t = 0$. Akselerasjonen til bilen er vist som en funksjon av tid i figuren nedenfor. Estimer hastigheten Kåre kjører i etter 4 sekunder. Skriv ned eventuelle antakelser du gjør. Diskuter hvordan estimatet kan forbedres.



Refocus
Area
Accumulate
Approximate
Refine

Resultat: En sekvens bestående av tre problemer



1 En biltur

En familie på tur kjører en bil med konstant fart 50km/t .

- Velg et tidspunkt mellom 0 og 5 timer. Regn ut hvor langt familien har kjørt på dette tidspunktet.
- Lag et plott som viser hastigheten som en funksjon av tid for t mellom 0 og 5 timer. Diskuter om dere kunne ha brukt grafen til å regne ut dette.

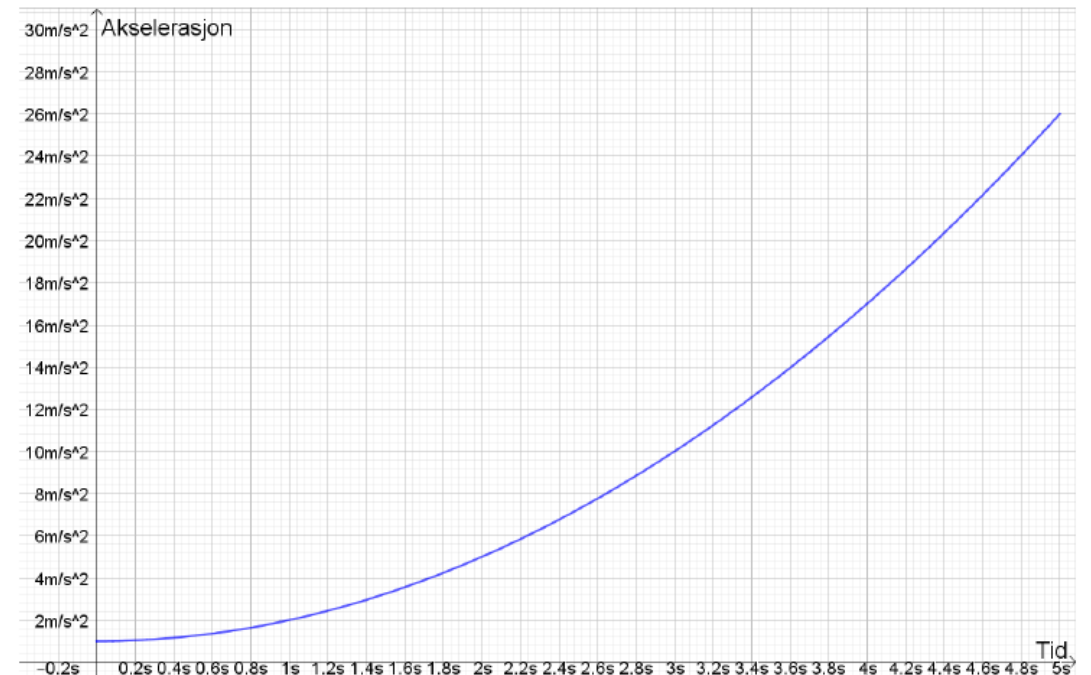
2 Å fylle en flaske med vann

Anne ønsker å fylle en tom flaske med nøyaktig 3 dl vann. Figuren nedenfor viser hvor mye vann som kommer inn og ut av flasken ved tiden t . Diskuter om Anne lykkes.



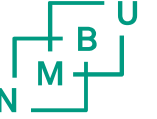
3 Bånn gass!

Kåre sitter i en bil og trækker hardt på gasspedalen ved tiden $t = 0$. Akselerasjonen til bilen er vist som en funksjon av tid i figuren nedenfor. Estimer hastigheten Kåre kjører i etter 4 sekunder. Skriv ned eventuelle antakelser du gjør. Diskuter hvordan estimatet kan forbedres.





Bråtalien, M., Skogholt, J., & Naalsund, M. (2022). Designing problems introducing the concept of numerical integration in an inquiry-based setting. In C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 91-98). Alicante, Spain: PME.



Some experiences after four years of implementation of the problems in a PD course

- Messy, non-linear processes with much variation between groups.
- A deeper look at two groups (2019) indicates that using multiple problems and gradually adding new stages contribute to productive discussions and progress.
- Straight forward for new lecturer (2021) to use the problems.
- The solution to all the world's problems is finding the area under the curve?

Final reflections

- (Re)discovering how the area under a curve can represent another quantity and how to approximate such areas.
- Starting point for trapezoidal rule, midpoint rule, endpoint rule, Riemann sums etc, which are fundamental for deep understanding of integration.
- Time to grapple with ideas and build on their knowledge.
- Collaborative aspect important – create a shared understanding.

Læreplan R2

- gjøre rede for integral som en grenseverdi av en følge av summer, og tolke betydningen av denne grenseverdien i ulike situasjoner.
- utvikle algoritmer for å beregne integraler numerisk, og bruke programmering til å utføre algoritmene

(<https://www.udir.no/lk20/mat03-02/kompetansemaal-og-vurdering/kv294>)